

УДК 531.3

**КИНЕТИКА БИФИЛЯРНОЙ ПЕРЕДАЧИ****Ю. А. КАШИН, М. И. ЖАДАН***Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»,  
Республика Беларусь***Р. Е. КАШИНА***Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь***Введение**

Бифилярной передачей условимся называть систему двух тел, взаимодействие силами и движениями между которыми осуществляется посредством пары связывающих их гибких нерастяжимых нитей, именуемых поводками.

Наглядным примером такой передачи служит взаимодействие силами и движениями между вращающимся колесом карусели и подвешенной к нему на двух цепях люлькой, сохраняющей четыре степени относительной свободы.

Бифилярные передачи по сравнению с традиционно применяемыми в машиностроении передачами имеют следующие отличительные свойства. При их использовании в подобном карусели роторном агрегате легко достигим высокий уровень центробежных сил подвижных элементов и сил натяжения удерживающих их поводков при их относительно малой массе. В этих условиях возможность подавления избыточных степеней свободы подвижных элементов наложением дополнительных кинематических связей открывает возможность наделения качественно новыми свойствами самих роторных агрегатов. Подтверждением такой возможности является используемый в практике резки алмазов известный эффект приобретения жесткости быстро вращающимся кругом гибкой медной фольги. Отметим также, что подобный эффект нами установлен и при испытаниях ветротурбины с решеткой гибких лопастей на бифилярной подвеске. Изучение этих свойств послужило мотивом для данного исследования.

**Постановка задачи**

Целью настоящей работы является аналитическое описание стационарных состояний бифилярных передач, примером которых можно считать случай равномерного вращения тела  $T_A$  вместе с синхронно вращающимся вокруг него телом  $T_B$ , удерживаемым двумя поводками. Очевидно, что в этой ситуации тело  $T_B$  занимает позицию согласно действию гибких связей и совокупности массовых и внешних сил. Силы натяжения поводков  $P > 0$  и  $Q > 0$  являются реакциями, уравнивающими эту совокупность сил, зависящих от пространственного положения тела  $T_B$  и от конкретных условий работы всей механической системы.

**Метод исследования**

Излагаемый метод описания состояний и поведения изучаемой механической системы основан на применении принципа Даламбера аналитической механики. Раз-

вивая этот принцип, покажем, что точные решения системы нелинейных уравнений, выражающих его для бифилярной передачи, существуют, и укажем алгоритм их построения.

### Геометрические характеристики состояния передачи

В любом стационарном состоянии передачи тело  $T_A$  будем считать условно неподвижным, а тело  $T_B$  – подвижным.

Полагаем, что каждое из тел имеет по две выступающие точки  $A, D$  и  $B, C$ , взаимоудаленные на базовые расстояния, соответственно  $AD = a$  и  $BC = b$ , и попарно связанные поводками длиной  $AB = r$  и  $DC = s$  (рис. 1).

В произвольном  $Z$ -состоянии передачи точки подвески поводков можно рассматривать либо вершинами пространственного четырехугольника  $ABCD$ , противоположные стороны которого лежат на скрещивающихся прямых, либо вершинами соответствующего тетраэдра, достраиваемого введением диагоналей  $AC$  и  $BD$ , также лежащих на скрещивающихся прямых. Пусть  $a < b$ ,  $r < s$ ,  $\vec{a} = \vec{AD} = a\vec{\tau}_a$ ,  $\vec{b} = \vec{BC} = b\vec{\tau}_b$ ,  $\vec{r} = \vec{AB} = r\vec{\tau}_r$ ,  $\vec{s} = \vec{DC} = s\vec{\tau}_s$  и необходимое условие существования четырехугольника. Кратчайшие расстояния между линиями поводков, базовыми линиями и линиями диагоналей соответственно равны:

$$d_1 = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{s} \times \vec{r})|}{|\vec{s} \times \vec{r}|} = a \frac{|\vec{\tau}_a \cdot (\vec{\tau}_s \times \vec{\tau}_r)|}{|\vec{\tau}_s \times \vec{\tau}_r|}, \quad d_2 = \frac{|\vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = r \frac{|\vec{\tau}_r \cdot (\vec{\tau}_a \times \vec{\tau}_b)|}{|\vec{\tau}_a \times \vec{\tau}_b|},$$

$$d_3 = \frac{|\vec{s} \cdot [(\vec{a} - \vec{r}) \times (\vec{a} - \vec{s})]|}{|(\vec{a} - \vec{r}) \times (\vec{a} - \vec{s})|} = rsd_1 \frac{|\vec{\tau}_s \times \vec{\tau}_r|}{|\vec{a} \times \vec{s} + \vec{s} \times \vec{r} - \vec{r} \times \vec{a}|}.$$

$$\vec{a} + \vec{s} = \vec{b} + \vec{r}. \quad (1)$$

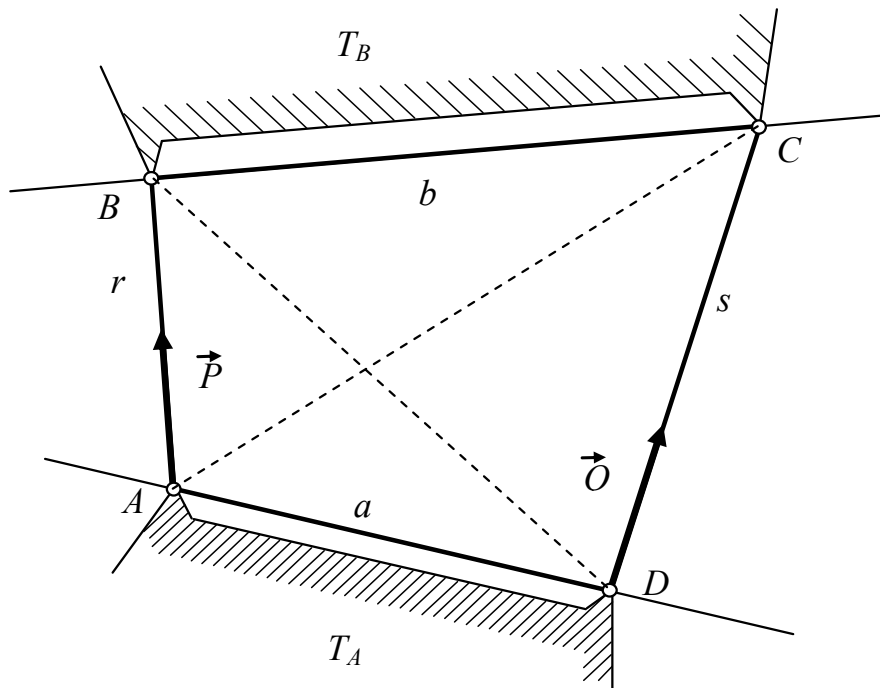


Рис. 1. Произвольное  $Z$ -состояние бифилярной передачи

Объем тетраэдра

$$v = \frac{1}{6} |(\vec{a} + \vec{s}) \cdot (\vec{a} \times \vec{r})| = \frac{asr}{6} |\vec{\tau}_a \cdot (\vec{\tau}_s \times \vec{\tau}_r)|.$$

Если  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , то  $v = 0$ , четырехугольник является плоским, а обе пары линий его противоположных сторон пересекаются. Эту возможную ситуацию используем для определения условного начального стационарного  $Z^0$ -состояния передачи. Предполагаем, что подвижное тело занимает такую начальную  $T_B^0$ -позицию, при которой линии  $AB^0$  и  $DC^0$  начального четырехугольника  $AB^0C^0D$  пересекаются в некоторой, связанной с телом  $T_A$ , точке  $K^0$ , образуя равнобедренный  $\Delta AK^0D$  с углами  $\gamma^0$  при основании  $AD$ , и пусть  $\sigma^0$  – угол между базовыми линиями  $AD$  и  $B^0C^0$  (рис. 2). Это начальное  $Z^0$ -состояние используем для введения на каждом из тел связанной с ним системы декартовых координат.

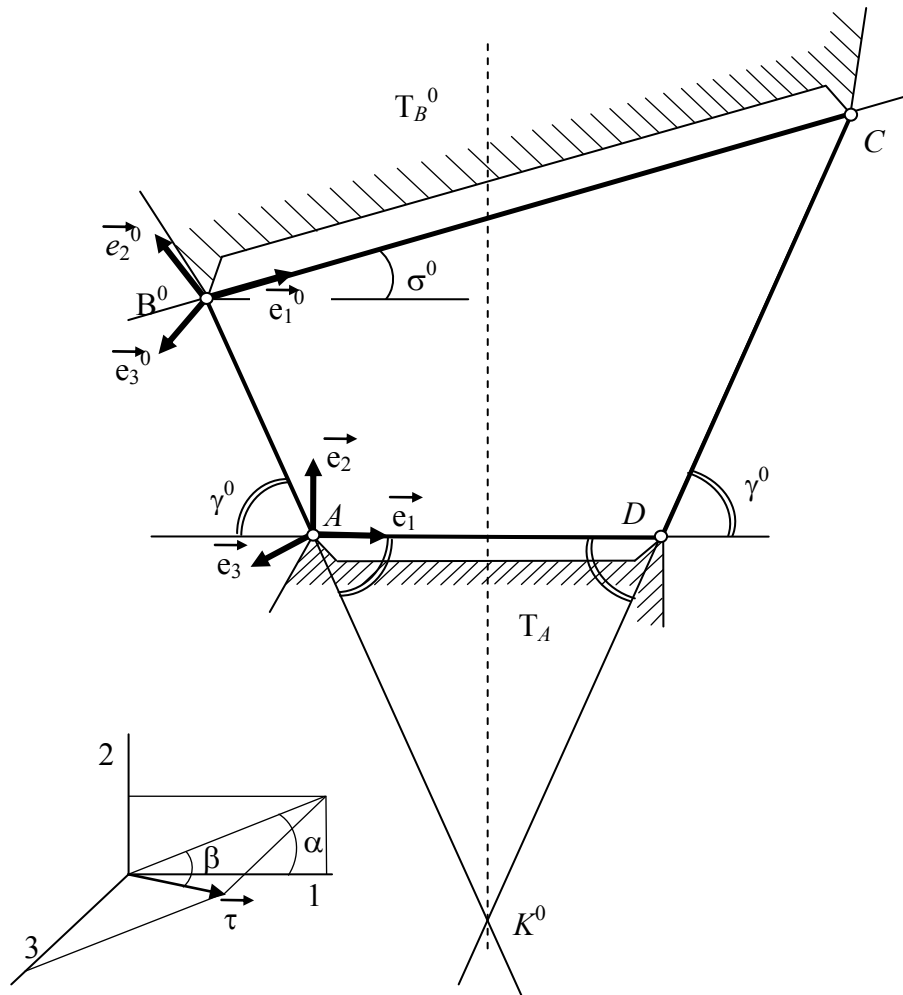


Рис. 2. Начальное  $Z^0$ -состояние бифилярной передачи

На теле  $T_A$  началом координат выбираем точку  $A$ , а орты  $\vec{e}_i$ ,  $i = \overline{1,3}$  ориентируем так, чтобы орт  $\vec{e}_1 = \vec{\tau}_a$ , орт  $\vec{e}_2$  был ориентирован в сторону подвижного тела и располагался в плоскости  $\Delta AK^0D$ , а орт  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  был перпендикулярен к этой плоско-

сти. Следовательно, далее считаем, что  $\vec{a} = A\vec{D} = a\vec{e}_1$ ,  
 $\vec{r}^0 = A\vec{B}^0 = r(-\vec{e}_1\cos\gamma^0 + \vec{e}_2\sin\gamma^0)$ ,  $\vec{s}^0 = D\vec{C}^0 = s(\vec{e}_1\cos\gamma^0 + \vec{e}_2\sin\gamma^0)$ ,  $\vec{b}^0 = B^0\vec{C}^0 =$   
 $= b(\vec{e}_1\cos\sigma^0 + \vec{e}_2\sin\sigma^0)$ . При этом согласно (1):

$$b^2 = a^2 + (s-r)^2 + 2a(s+r)\cos\gamma^0 + 4sr\cos^2\gamma^0; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\sigma^0 = \frac{(s-r)\sin\gamma^0}{a + (s+r)\cos\gamma^0}. \quad (3)$$

Единичные направляющие векторы названных и далее встречающихся векторов будем определять их сферическими угловыми координатами  $\alpha$  и  $\beta$  с пометкой соответствующими именными индексами, считая, что

$$\vec{\tau}_b = \frac{\vec{b}}{b} = \vec{e}_1\cos\alpha_b\cos\beta_b + \vec{e}_2\sin\alpha_b\cos\beta_b + \vec{e}_3\sin\beta_b; \quad (4)$$

$$\vec{\tau}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_1\cos\alpha_r\cos\beta_r + \vec{e}_2\sin\alpha_r\cos\beta_r + \vec{e}_3\sin\beta_r$$

и т. д.

На подвижном теле в его  $T_B^0$ -позиции началом координат примем точку  $B^0$ , а орты  $\vec{e}_i^0$ ,  $i = 1, 3$  выбираем так, что  $\vec{e}_1^0 = \vec{\tau}_b^0 = \vec{e}_1\cos\sigma^0 + \vec{e}_2\sin\sigma^0$ ,  $\vec{e}_2^0 = -\vec{e}_1\sin\sigma^0 + \vec{e}_2\cos\sigma^0$ ,  $\vec{e}_3^0 = \vec{e}_3$ , т. е. полагаем, что трехгранник  $\vec{e}_i^0$  получается поворотом трехгранника  $\vec{e}_i$  вокруг оси  $\vec{e}_3 = \vec{e}_3^0$  на угол  $\sigma^0$ .

Изменение ориентации подвижного тела при его переходе из  $T_B^0$ -позиции в  $T_B$ -позицию определим системой углов самолета  $\psi, \theta, \varphi$ , считая, что углом рыскания  $\psi$  указывается поворот этого тела вокруг оси  $\vec{e}_3^0 = \vec{e}_3'$ , углом тангажа  $\theta$  – его последующий поворот вокруг оси  $\vec{e}_2' = \vec{e}_2''$ , а углом крена  $\varphi$  – его финальный поворот вокруг оси  $\vec{e}_1'' = \vec{e}_1^*$ , обеспечивающий совмещение подвижного тела с его  $T_B$ -позицией и с ориентацией, определяемой ориентацией трехгранника  $\vec{e}_i^*$ . В начальной  $T_B^0$ -позиции  $\psi^0 = \theta^0 = \varphi^0 = 0$ .

В произвольном  $Z$ -состоянии передачи взаимная ориентация тел  $T_A$  и  $T_B$ , согласно принятому соглашению, будет характеризоваться матрицей ориентации:

$$m_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^* = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \sigma^0) & -\sin(\psi + \sigma^0) & 0 \\ \sin(\psi + \sigma^0) & \cos(\psi + \sigma^0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi + \sigma^0)\cos\theta & -\sin(\psi + \sigma^0)\cos\varphi + \cos(\psi + \sigma^0)\sin\theta\sin\varphi & \sin(\psi + \sigma^0)\sin\varphi + \cos(\psi + \sigma^0)\sin\theta\cos\varphi \\ \sin(\psi + \sigma^0)\sin\theta & \cos(\psi + \sigma^0)\cos\varphi + \sin(\psi + \sigma^0)\sin\theta\sin\varphi & -\cos(\psi + \sigma^0)\sin\varphi + \sin(\psi + \sigma^0)\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (5)$$

В этом состоянии ориентация всех элементов передачи определяется девятью угловыми координатами:  $\alpha_b, \beta_b, \alpha_r, \beta_r, \alpha_s, \beta_s, \psi, \theta, \varphi$ . Для установления связи между всеми этими переменными учтем, что  $\vec{e}_1^* = \vec{\tau}_b$  и что

$$\vec{e}_1^* = \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_1^*) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 m_{i1} \vec{e}_i = \vec{e}_1 \cos(\psi + \sigma^0) \cos\theta + \vec{e}_2 \sin(\psi + \sigma^0) \cos\theta - \vec{e}_3 \sin\theta. \quad (6)$$

Сопоставляя (4) и (6), устанавливаем, что

$$\psi + \sigma^0 = \alpha_b, \quad \theta = -\beta_b. \quad (7)$$

Еще три уравнения кинематических связей получаем проектированием векторного уравнения (1) на оси координат тела  $T_A$ :

$$\left. \begin{aligned} a + s \cos \alpha_s \cos \beta_s &= r \cos \alpha_r \cos \beta_r + b \cos \alpha_b \cos \beta_b; \\ s \sin \alpha_s \cos \beta_s &= r \sin \alpha_r \cos \beta_r + b \sin \alpha_b \cos \beta_b; \\ s \sin \beta_s &= r \sin \beta_r + b \sin \beta_b. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Таким образом, на девять переменных углов наложено пять уравнений кинематических связей (7), (8). Следовательно, при заданных размерах  $a, b, r, s$  независимыми обобщенными координатами передачи, определяющими ее произвольное  $Z$ -состояние можно считать некую четверку из названных углов, например,  $\alpha_b, \beta_b, \alpha_s$  и  $\varphi$ . Тогда углы  $\alpha_r, \beta_r, \beta_s, \psi, \theta$  должны определяться функциями этих независимых углов из условия удовлетворения уравнениям связей (7), (8).

Для определенности отметим, что обсуждаемое стационарное  $Z$ -состояние передачи далее будет рассматриваться результатом некоторого непрерывного процесса стационарного изменения состояния элементов этой механической системы из ее начального стационарного  $Z^0$ -состояния, характеризуемого параметрами:

$$\alpha_b^0 = \sigma^0, \quad \beta_b^0 = 0, \quad \alpha_r^0 = \pi - \gamma^0, \quad \beta_r^0 = 0, \quad \alpha_s^0 = \gamma^0, \quad \beta_s^0 = 0, \quad \varphi^0 = 0. \quad (9)$$

### Силовые характеристики состояния передачи

В  $Z$ -состоянии передачи система массовых и внешних сил, действующих на подвижное тело, порождает соответствующие  $T_b$ -позиции этого тела силы натяжения поводков  $\vec{P} = P \vec{\tau}_r$  и  $\vec{Q} = Q \vec{\tau}_s$ . Главный вектор этой системы сил

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} \quad (10)$$

и пусть

$$\vec{\tau}_F = \frac{\vec{F}}{F} = \begin{cases} \vec{e}_1 \cos \alpha_F \cos \beta_F + \vec{e}_2 \sin \alpha_F \cos \beta_F + \vec{e}_3 \sin \beta_F; \\ \vec{e}_1^* \cos \alpha_F^* \cos \beta_F^* + \vec{e}_2^* \sin \alpha_F^* \cos \beta_F^* + \vec{e}_3^* \sin \beta_F^* \end{cases} \quad (11)$$

— единичный направляющий вектор силы  $\vec{F}$ ,  $\alpha_F^*, \beta_F^*$  — его сферические угловые координаты в системе координат тела  $T_b$ . Тогда, учитывая, что

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^*) \vec{e}_j^* = \sum_{j=1}^3 m_{ij} \vec{e}_j^*, \quad i = \overline{1,3} \quad (12)$$

из (10) можем установить, что

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha_F^* \cos\beta_F^* &= m_{11} \cos\alpha_F \cos\beta_F + m_{21} \sin\alpha_F \cos\beta_F + m_{31} \sin\beta_F; \\ \sin\alpha_F^* \cos\beta_F^* &= m_{12} \cos\alpha_F \cos\beta_F + m_{22} \sin\alpha_F \cos\beta_F + m_{32} \sin\beta_F; \\ \sin\beta_F^* &= m_{13} \cos\alpha_F \cos\beta_F + m_{23} \sin\alpha_F \cos\beta_F + m_{33} \sin\beta_F. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В силу равенств (7) элементы матрицы (5) можно считать функциями переменных  $\alpha_b, \beta_b$  и  $\varphi$ :  $m_{ij} = m_{ij}(\alpha_b, \beta_b, \varphi)$ . Тогда, полагая известными и удовлетворяющими данному  $Z$ -состоянию переменные  $\alpha_F, \beta_F, \alpha_b, \beta_b$ , уравнения (12) можно будет рассматривать системой уравнений для определения соответствующих значений  $\alpha_F^*, \beta_F^*, \varphi$ , что и учтем позднее.

Момент действующих на тело  $T_B$  сил относительно точки  $A$

$$\vec{M}_A = \vec{a} \times \vec{Q} \quad (14)$$

и пусть

$$\vec{\tau}_M = \frac{\vec{M}_A}{M_A} = \vec{e}_1 \cos\alpha_M \cos\beta_M + \vec{e}_2 \sin\alpha_M \cos\beta_M + \vec{e}_3 \sin\beta_M. \quad (15)$$

Начальное  $Z^0$ -состояние передачи доопределим реально исполнимым соглашением о том, что в этом состоянии на подвижное тело действует такая стационарная система сил, которая порождает одинаковое натяжение поводков  $P^0 = Q^0$ . Тогда, очевидно,

$$\vec{F}^0 = \vec{P}^0 + \vec{Q}^0 = 2Q^0 \sin\gamma^0 \vec{e}_2; \quad (16)$$

$$\vec{M}_A^0 = \vec{a} \times \vec{Q}^0 = aQ^0 \sin\gamma^0 \vec{e}_3. \quad (17)$$

Не теряя общности, примем, что  $F^0 = F$ , и пусть

$$p = \frac{P}{F^0}, \quad q = \frac{Q}{F^0}, \quad \vec{\mu}_A = \frac{\vec{M}_A}{M_A^0}; \quad (18)$$

$$p^0 = q^0 = \frac{1}{2\sin\gamma^0}, \quad \mu_A^0 = 1, \quad \alpha_F^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_F^0 = 0, \quad \alpha_M^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_M^0 = \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

В этих обозначениях проекции векторного уравнения (10) на оси координат тела  $T_A$  принимают вид

$$\left. \begin{aligned} p \cos\alpha_r \cos\beta_r + q \cos\alpha_s \cos\beta_s &= \cos\alpha_F \cos\beta_F; \\ p \sin\alpha_r \cos\beta_r + q \sin\alpha_s \cos\beta_s &= \sin\alpha_F \cos\beta_F; \\ p \sin\beta_r + q \sin\beta_s &= \sin\beta_F. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Используя (14) и (15), можно установить, что

$$\vec{M}_A = (a\vec{e}_1) \times (F^0 q \vec{\tau}_s) = aF^0 q (-\vec{e}_2 \sin\beta_s + \vec{e}_3 \sin\alpha_s \cos\beta_s),$$

$$M_A = aF^0 q \sqrt{1 - \cos^2\alpha_s \cos^2\beta_s},$$

$$\mu_A = 2q\sqrt{1 - \cos^2\alpha_s \cos^2\beta_s}; \quad (21)$$

$$\alpha_M = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{\tau}_M = \bar{e}_2 \cos\beta_M + \bar{e}_3 \sin\beta_M, \\ \operatorname{tg}\beta_s = -\sin\alpha_s \operatorname{ctg}\beta_M. \quad (22)$$

Аналитические зависимости (5), (7), (8), (13), (20)–(22), выражающие принцип Даламбера для элементов изучаемой механической системы, будем называть математической моделью стационарного  $Z$ -состояния бифилярной передачи. При ее исследовании, если иное особо не оговорено, величины  $a, b, r, s$  будем считать постоянными геометрическими характеристиками передачи, величины  $\alpha_F, \beta_F, \mu_A$  и  $\beta_M$  – ее переменными силовыми параметрами состояния, а величины  $\alpha_b, \beta_b, \alpha_r, \beta_r, \alpha_s, \beta_s, p, q, \varphi, \alpha_F^*, \beta_F^*$  и др. – искомыми неизвестными, подлежащими определению из условия их удовлетворения соотношениям математической модели и закономерностям взаимодействия всех элементов механической системы с окружающей средой в данных условиях ее работы.

#### Плоское $Z$ -состояние передачи

Наиболее простым для анализа и описания является состояние передачи, когда четырехугольник  $ABCD$  остается плоским и расположенным в плоскости начального четырехугольника  $AB^0C^0D$ . Для осуществления такого состояния достаточно предположить, что

$$\beta_F = \beta_F^0 = 0, \quad \beta_M = \beta_M^0 = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, последовательно используя уравнение (22), третье уравнение (20) и третье уравнение (8), устанавливаем, что в этом случае  $\beta_s = \beta_r = \beta_b = 0$ , что и подтверждает данное утверждение.

Тогда систему уравнений (8), (20) и (21) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} a + s\cos\alpha_s - r\cos\alpha_r - b\cos\alpha_b &= 0; \\ s\sin\alpha_s - r\sin\alpha_r - b\sin\alpha_b &= 0; \\ q\cos\alpha_s + p\cos\alpha_r - \cos\alpha_F &= 0; \\ q\sin\alpha_s + p\sin\alpha_r - \sin\alpha_F &= 0; \\ 2q\sin\alpha_s - \mu_A &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Из первых двух уравнений этой системы находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha_b = \frac{s\sin\alpha_s - r\sin\alpha_r}{a + s\cos\alpha_s - r\cos\alpha_r}; \quad (24)$$

$$\cos(\alpha_r - \alpha_s) - \frac{a}{r}\cos\alpha_s + \frac{a}{s}\cos\alpha_r = \frac{a^2 + s^2 + r^2 - b^2}{2rs}. \quad (25)$$

Замечаем, что при заданном соотношении размеров  $a:b:r:s$  уравнением (25) определяется взаимосвязь переменных углов  $\alpha_s$  и  $\alpha_r$ , значениями которых характе-

ризуется множество всех возможных форм четырехугольника  $ABCD$  с данным соотношением его сторон.

Для определенности, множество допустимых рабочих состояний передачи ограничим условиями, что

$$0 \leq \alpha_s < \alpha_r \leq \pi, \quad (26)$$

и отметим, что эти условия выполнимы, если  $a < b$ ,  $r < s$ ,  $a + s < b + r$  и  $b < a + r + s$ . Тогда из уравнения (25) находим, что при  $\alpha_s = 0$

$$\alpha_r = \alpha_{r_{\min}} = \arccos \frac{(a+s)^2 + r^2 - b^2}{2r(a+s)},$$

при  $\alpha_r = \pi$

$$\alpha_s = \alpha_{s_{\max}} = \arccos \frac{b^2 - (a+r)^2 - s^2}{2s(a+r)},$$

что

$$\alpha_s \in [0, \alpha_{s_{\max}}], \quad \alpha_r \in [\alpha_{r_{\min}}, \pi]$$

и пусть

$$\alpha_r = f(\alpha_s) \in [\alpha_r, \pi] \quad (27)$$

– решение уравнения (25), которым при каждом  $\alpha_s \in [0, \alpha_{s_{\max}}]$  определена соответствующая допустимая форма четырехугольника  $ABCD$ .

Затем, используя последние три уравнения в (23), находим, что

$$p = \frac{\sin(\alpha_F - \alpha_s)}{\sin(f(\alpha_s) - \alpha_s)}, \quad q = \frac{\sin(f(\alpha_s) - \alpha_F)}{\sin(f(\alpha_s) - \alpha_s)}; \quad (28)$$

$$\mu_A = \frac{2\sin\alpha_s \sin(f(\alpha_s) - \alpha_F)}{\sin(f(\alpha_s) - \alpha_s)}. \quad (29)$$

Далее учтем, что действительным состояниям передачи соответствует необходимость выполнения условий  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$  и что согласно (28) и (26) они выполнимы, если

$$0 \leq \alpha_s \leq \alpha_F \leq f(\alpha_s) \leq \pi. \quad (30)$$

Используя формулу (29), устанавливаем, что при  $0 \leq \alpha_s \leq \alpha_F$   $\mu_A \leq 2\sin\alpha_F$ , а при  $\alpha_F \leq f(\alpha_s) \leq \pi$   $\mu_A \geq 0$ . Совместному выполнению этих силовых условий существования плоских состояний передачи на плоскости  $O\alpha_F\mu_A$  соответствуют точки  $(\alpha_F, \mu_A)$   $\Omega$ -области, расположенной между осью абсцисс  $\mu_A = 0$  и синусоидой  $\mu_A = 2\sin\alpha_F$  при  $\alpha_F \in [0, \pi]$  (рис. 3). Начальному состоянию передачи соответствует точка  $Z^0(\frac{\pi}{2}, 1)$ .



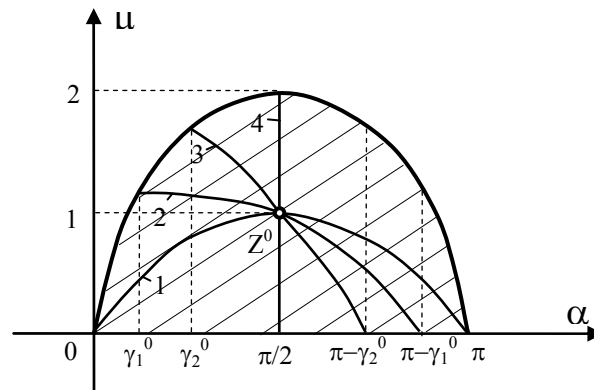


Рис. 3.  $\Omega$ -область допустимых значений  $(\alpha_F, \mu_A)$  для существования плоских состояний бифилярных передач и графики функции  $\mu_A = \frac{\sin(\alpha_F + \gamma^0)}{\cos \gamma^0}$ , определяющей силовые условия неизменности формы четырехугольника  $AB^0C^0D$  при различных углах  $\gamma^0$ :  $1 - \gamma^0 = 0$ ;  $2 - \gamma^0 = \frac{\pi}{6}$ ;  $3 - \gamma^0 = \frac{\pi}{3}$ ;  $4 - \gamma^0 = \frac{\pi}{2}$

$\Omega$ -область не зависит от размеров и формы начального четырехугольника  $AB^0C^0D$ . Это означает, что они не влияют на допустимые в плоском состоянии передачи сочетания  $(\alpha_F, \mu_A)$ , характеризующие соответствующее силовое взаимодействие тел  $T_A$  и  $T_B$  посредством связывающих их гибких поводков.

Рассматривая  $\alpha_F$  аргументом,  $\alpha_s$  – параметром функции  $\mu_A = \mu_A(\alpha_F, \alpha_s)$ , определяемой формулой (29), устанавливаем, что этой формулой при  $\alpha_s \in [0, \alpha_{s_{\max}}]$  в  $\Omega$ -области определено однопараметрическое семейство дуг синусоид различной амплитуды, различного сдвига по фазе и одинакового периода  $2\pi$ . При этом значению  $\alpha_s = \alpha_{s_{\max}}$  соответствует дуга границы  $\Omega$ -области  $\mu_A = 2\sin\alpha_F$ , значению  $\alpha_s = \gamma^0$  – дуга синусоиды, проходящей через точку  $Z^0(\frac{\pi}{2}, 1)$ . Каждая из дуг этого семейства соответствует постоянной форме четырехугольника  $ABCD$  с данным углом  $\alpha_s \in [0, \alpha_{s_{\max}}]$  и определяет соответствующую зависимость  $\mu_A$  от  $\alpha_F$ , при которой достигается такая неизменность формы.

Согласно (29) начальный четырехугольник  $AB^0C^0D$  будет сохранять неизменной свою начальную форму с  $\alpha_s = \gamma^0$ , если  $\alpha_F \in [\gamma_0, \pi - \gamma_0]$

$$\mu_A = \frac{\sin(\alpha_F + \gamma^0)}{\cos \gamma^0}. \quad (31)$$

Этой формулой определено изображенное на рис. 3 однопараметрическое семейство дуг синусоид, проходящих через точку  $Z^0(\frac{\pi}{2}, 1)$  и стягивающих соответствующие точки границы  $\Omega$ -области при различных значениях  $\gamma_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Заключение**

Согласно вышеизложенному задача описания плоского  $Z$ -состояния бифилярной передачи с заданным соотношением размеров  $a : b : r : s$  при данном сочетании силовых параметров  $\alpha_F$  и  $\mu_A$  сводится к построению действительного решения нелинейного уравнения (25), удовлетворяющего всем названным условиям и ограничениям. Для описания пространственных  $Z$ -состояний решение подобной задачи оказывается существенно более сложным. Далее покажем, что все эти осложнения вполне устранимы при замене задачи построения решения полученной системы нелинейных уравнений в конечном виде задачей построения решения для соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений.

*Получено 25.11.2007 г.*